量子準位の運動と曲率分布

京大理　　高見 利也　長谷川 洋

量子系の準位統計の最近の結果は、対応する古典力学系の可積分·非可積分性そして後者の場合古典力学系の時間反転に関する性質により大別される。[1,2] 非可積分性の特質は、そのハミルトン関数がパラメター λ に依存しているときエネルギー固有値が互いに交差することなく運動することによって特徴づけられ、したがってスペクトルのランダム性の原因となって現れる。その良い実例は実験的にも理論的にも良く調べられた磁場によるリドバーグ準位の運動である。[3,4]「準位非交差」を特徴づける量として固有値 $E_i(\lambda)$ の二階微分である曲率 $K_i(\lambda)$ を導入し、その分布 $P(K)$ がどのように振る舞うかを最近 Gapard らが論じた。[5] それによれば、$P(K)_{k\to\infty}$ (すなわち $P(K)$ の裾の K 依存性) は

$$P(|K|) \sim |K|^{-\nu-2} \quad \begin{cases} \nu = 1 & \text{GOE} \\ \quad 2 & \text{GUE} \\ \quad 4 & \text{GSE} \end{cases} \tag{1}$$

という最近接レベル間隔の分布にパラレルな普遍性を示す。この結果を導いた彼らの定式化を検討するならば、(1) の性質は間隔分布 $P(S) \sim S^\nu$ for $S \to 0$ ($\nu = 1$ GOE, $\nu = 2$ GUE, $\nu = 4$ GSE) において $|K| = S^{-1}$ と変数変換することに相当することがわかる。ここで示す我々の研究は、第一に具体的なモデルについて (1) を検証し、合わせて K が有限の範囲での個別性を調べること、第二に Gaspard らの論文で解決されていない理論上の 2 、3 の点を補足することである (プレプリント 6 、7) 。

1. Stadium Billiard[8] と Kicked Rotator[9] における曲率分布[6]

Gaspard らの結果 (1) を具体的なモデルについて確かめることにする。ここで扱うモデルは、stadium billiard と kicked rotator である。Stadium billiard は完全非可積分な量子系の例として良く知られており、十分高い励起状態まで含めたエネルギー固有値の統計をとると GOE タイプのクラスに属することが知られている。断熱的に変化させるパラメターとしてはアスペクト比をとる。一方、kicked rotator の場合は周期的なキックの大きさをパラメターとして準エネルギー固有値 (以下「準固有値」と呼ぶ) の統計を扱う。これらの系のパラメター変化に対する固有値および準固有値の様子を図 1 に示す。図 1(a) は stadium billiard 、(b) が OE タイプの対称性の kicked rotator 、(c) は UE タイプの kicked rotator である。固有値および準固有値の二階微分の統計を求めると図 2 のようになり、Gaspard らの結果 (直線) と良く合うことがわかる。

二階微分の値の大きいところでの振る舞いに関しては理論的な計算が示すとおりの結果が得られたが、逆の場合の極限 (二階微分の値がゼロに近い場合) についてはそれぞれの系に特有の性質を示すことが予想される。図 3 に示すのは、stadium billiard と OE タイプの kicked rotator の曲率の小さい部分での分布の様子である。Stadium billiard が $K = 0$ に高いピークを持つが、これは、図 1(a) に現れているようなレベルのソリトン的な構造の存在[5]と関係があると思われる。

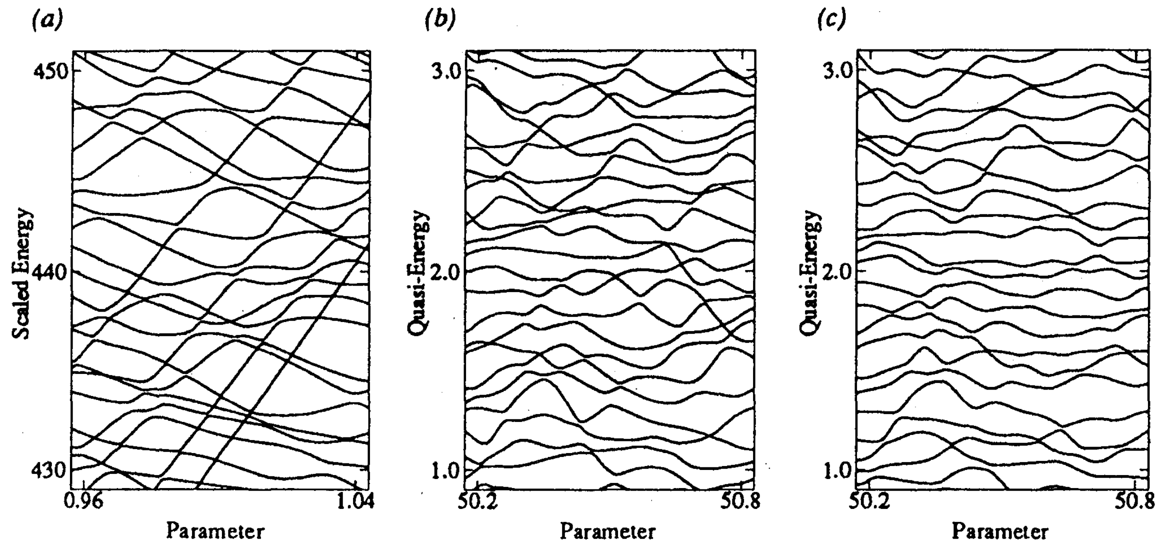

Fig.1 The parametric motion of eigenvalues or quasi-eigenvalues: (a) stadium billiard; (b) kicked rotator with time-reversal symmetry ($N = 64$, $M = 1$, $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 0$); (c) kicked rotator without time-reversal symmetry ($N = 64$, $M = 1$, $a = 1/\sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$).

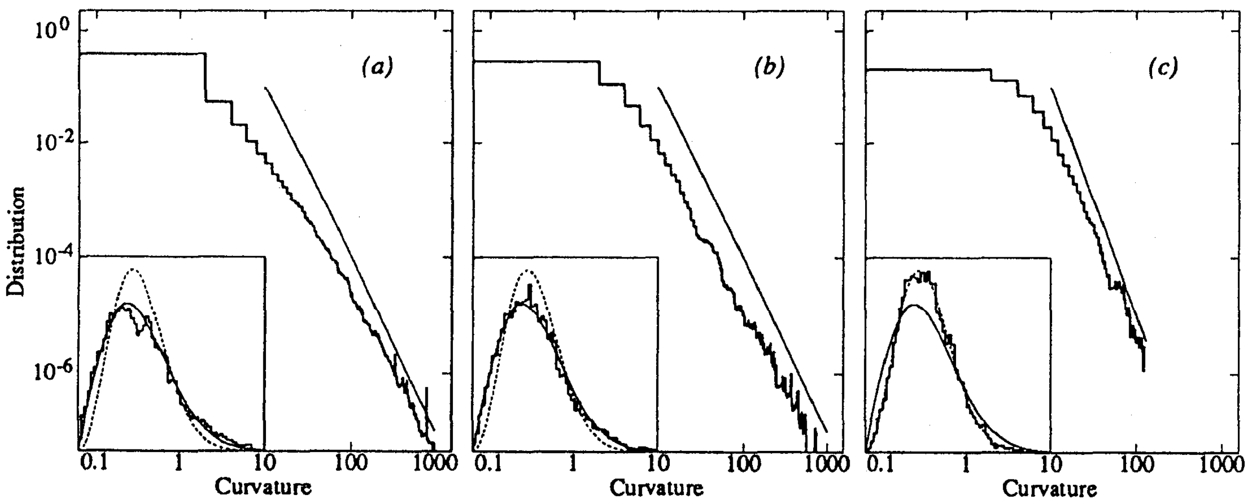

Fig.2 The calculated histogram for the distributions of curvature K: (a) stadium billiard; (b) kicked rotator with time-reversal symmetry; (c) kicked rotator without time-reversal symmetry. The straight line shows $|K|^{-3}$ in (a) and (b), and $|K|^{-4}$ in (c). The corresponding nearest-neighbor spacing distributions and Gaussian curves (full line: GOE and dotted line: GUE) are also given in the inset of each figure.

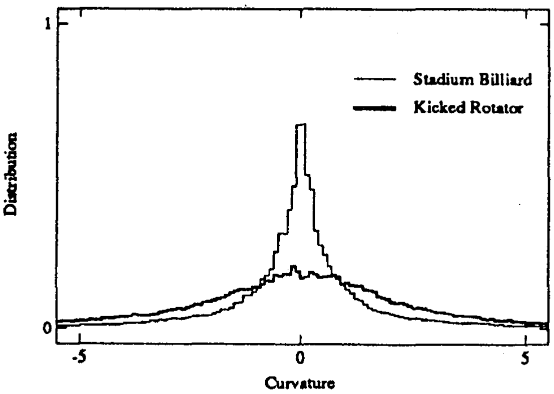

Fig.3 Curvature distributions at small curvature values for a stadium billiard (thin line) and a time-reversal kicked rotator (thick line).

2. レベル・ダイナミックスの定式化に関する補足[7]

Gaspard らの定式化は[5]ランダム行列の理論での出発点の結合確率分布

$$P_G(x_1,\ldots,x_N) = C_h(\prod_{m<n}|x_m - x_n|^\nu)e^{-\frac{1}{4a^2}\sum x_n^2} \quad \nu = 1,\ 2,\ 4 \tag{2}$$

に基礎をおいている。(2) は $N \times N$ エルミート行列の各サンプル H (実対称: $\nu = 1$, 複素エルミート: $\nu = 2$, 実 quaternion: $\nu = 4$) を対角表示する時の固有値 $x_1,\ldots,x_N$ の分布を表す。パラメター運動は各固有値 x_n が一つのパラメタ λ の滑らか (二階可微分) な関数であることを意味している。$H = H_0 + \lambda V$ の対角化から得られるものとして $\{x_n(\lambda)\}$ を含む変数の組に対する運動方程式をハミルトン力学として扱う方式が Pechukas、[10] Yukawa[11] によって開発され、特にその Liouville 方程式に従う分布から (2) が導かれることが示されているので、[11] その運動曲線の曲率分布を (2) によって算出する、というのが文献 5 の主要点となっている。

一方 kicked rotator の準固有値は、Floquet 因子 $F = e^{-i\lambda V}e^{-iH_0}$ の対角表示 diag($e^{-i\theta_1},\ldots,$ $e^{-i\theta_N}$) における $\{\theta_n(\lambda)\}$ として得られ、その分布は Dyson の circular ensemble (CE)

$$P_C(\theta_1,\ldots,\theta_N) = C_u \prod_{m<n}|e^{i(\theta_m-\theta_n)} - 1|^\nu \quad \nu = 1,\ 2,\ 4 \tag{3}$$

であることが知られている。[12] Gaspard らは Floquet 因子の具体例について準固有値を求め、その頻度曲線を求めた (kicked rotator について行なったのではない) が、(3) からも (1) が導かれるということは単なる推測にとどまっている。以下、文献 7 で我々が行なったことを要約する。

<u>ポアソン括弧関係の厳密な導出</u>

Yukawa[11,13] および Nakamura ら、[14] Haake ら[12] によってハミルトン力学化されたレベル・ダイナミックスとは、次の具体系を持つハミルトン関数の指定されたポアソン関係式から導かれる運動方程式によるもので、文献 5 ではそのポアソン関係式を具体的に示した:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_n p_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{m,n}\frac{\sum_{a=0}^{\nu-1}(\mathcal{L}^a_{mn})^2}{|x_m - x_n|^2} \quad \text{(hermitian case)} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_n p_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{m,n}\frac{\sum_{a=0}^{\nu-1}(\mathcal{L}^a_{mn})^2}{4\sin^2\frac{1}{2}(\theta_m - \theta_n)} \quad \text{(unitary case)} \tag{4'}$$

ポアソン括弧関係の特徴は、

(a) $(p_n,\ x_n)$ または $(p_n,\ \theta_n)|_{n=1}^N$ に関しては正準型

(b) $\{(p_l,\ x_l),\ \mathcal{L}^a_{mn}\} = 0$

(c) $\{\mathcal{L}^a_{mn},\ \mathcal{L}^b_{rs}\} = (\mathcal{L}^c_{tu}$ の一次結合) (Lie 代数)

で与えられる。(c) は力学が非正準型の変数で書かれていることを示す。このような場合のポアソン括弧関係は、変数の間のシンプレクティック構造から導かれるべきものであり、[15] 文献 7 で

はこれを論じた。(c)の変数 $\mathcal{L}^a_{mn}$ は一般次元ユークリッド空間における回転の各運動量成分に対応させられるものであり、このことはYukawa-Ishikawa[13]によって論ぜられているが根拠は明らかではなかったのである。

ガウス型集団(GE)と円周型集団(CE)との $N \to \infty$ での同等性

このことはMehta[16]によってもっとも具体的に示されているが、簡単ではない。文献7ではYukawaの手法にならって、ハミルトニアン(4')の正準分布に対する $N \to \infty$ の漸近分布から簡単に導かれることを示した。

文献

(1) O. Bohigas and M.J. Giannoni, *Lecture Notes in Physics* **209**, (1984) 1.

(2) M.V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A**19** (1986) 649.

(3) D. Wintgen and H. Friedrich, in Proc. Conf. "Atomic Spectra and Collisions in External Fields," Egham, England 1987 ed. by K.T. Taylor, M.H. Nayfeh and C.W. Clarrk, series Physics of Atoms and Molecules (Plenum, 1989).

(4) C. Iu, G.R. Welch, M.M. Kash, L. Hsu and D. Kleppner, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1133.

(5) P. Gasprd, S.A. Rice, H.J. Mikeska and K. Nakamura, Phys. Rev. A**42** (1990) 4015.

(6) T. Takami and H. Hasegawa, *Curvature Distribution of Chaotic Quantum Systems: Universality and Non-universality*, Preprint submitted to Phys. Rev. Lett. (1991).

(7) H. Hasegawa and T. Takami, *Parametric Motion of Levels: Poisson Brackets and Asymptotic Equivalence of the Circular and the Gaussian Ensemble*, Preprint submitted to Phys. Rev. A (1991).

(8) S.W. McDonald and A.N. Kaufman, Phys. Rev. A**37** (1988) 3067.

(9) H. Frahm and H.J. Mikeska, Phys. Rev. Lett. **60** (1987) 3; M. Feingold, S. Fishman, D.R. Grempel and R.E. Prange, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 377; F.M. Izraelev, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 541.

(10) P. Pechukas, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 943.

(11) T. Yukawa, Phys. rev. Lett. **54** (1985) 1883; Phys. Lett. A**116** (1986) 227.

(12) F. Haake, M. Kuś and R. Scharf, Z. Phys. B**65** (1987) 381; *Lecture Notes in Physics* **282** (1987) 3.

(13) T. Yukawa and T. Ishikawa, Prog. Theor. Phys. Suppl. **98** (1989) 157.

(14) K. Nakamura and M. Lakshmanan, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1661; K. Nakamura and H.J. Mikeska, Phys. Rev. A**35** (1987) 5294.

(15) 木村 利栄、菅野 礼司、微分形式による解析力学(マグロウヒル 1988) 第5章.

(16) M.L. Mehta, Comm. Math. Phys. **20** (1971) 245.